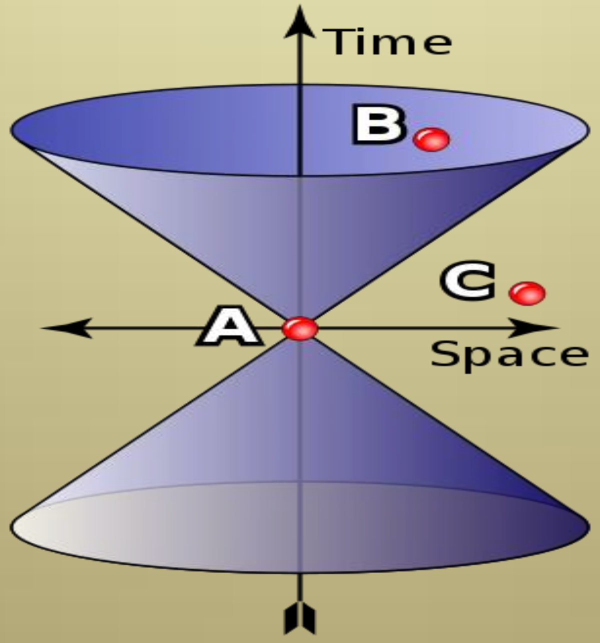
ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ



Σκοπός και μεθοδολογία

- Η διπλωματική εργασία με τον παραπάνω τίτλο εκπονήθηκε στα πλαίσια του ΜΔΕ «Μεταπτυχιακή Εξειδίκευση Καθηγητών Φυσικών Επιστημών». Το θέμα είναι επιμορφωτικό για τους καθηγητές ΠΕ04 της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και συνεπώς εκτός από την παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου, θέτει και προτάσεις για εκπαιδευτικές εφαρμογές.
- Θα αναπτυχθεί η ειδική θεωρία Σχετικότητας καθώς και εκπαιδευτικό υλικό που αντιστοιχεί σε ένα κεφάλαιο της ειδικής Σχετικότητας που απευθύνεται σε μαθητές Λυκείου .
- Η εργασία αυτή στηρίζεται σε βιβλιογραφική έρευνα γύρω από το γνωστικό αντικείμενο(το οποίο αποτελεί κλασικό κεφάλαιο της φυσικής). Θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην συγγραφή έντυπου υλικού που να στηρίζει την επιμόρφωση εκπαιδευτικών ώστε να εξασφαλίζεται επιστημονική πληρότητα να αποφεύγονται επιζήμιες απλουστεύσεις καθώς επίσης να αποφεύγονται (όπου είναι δυνατό) μαθηματικές λεπτομέρειες και περιπλοκές.
- Τέλος θα δοθεί ένα παράδειγμα της μεταφοράς γνώσεων από το επιστημονικό πεδίο στην Β΄θμια εκπαίδευση.

Σκοπός είναι η συγκέντρωση και επανάληψη όλων εκείνων των εννοιών και των αρχών της Νευτώνειας Μηχανικής, που σχετίζονται ή μεταβάλλονται στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, ώστε να αποσαφηνιστεί πού βρισκόμασταν με την προηγούμενη θεωρία και τι χρειάζεται ενδεχομένως να αλλάξει. Ειδικότεροι σκοποί είναι περιγραφή των ιδιοτήτων του νευτώνειου χωροχρόνου και των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς καθώς και η ανάγκη εισαγωγής της ειδικής σχετικότητας.

- Η Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein στην Ειδική και στην Γενική της μορφή αποτελεί έναν από τους θεμέλιους λίθους της κλασσικής φυσικής και έχει κεντρική θέση στην κατανόηση πολλών περιοχών της αστροφυσικής, της κοσμολογίας και γενικότερα της θεμελιώδους φυσικής.
- Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας προέκυψε στις αρχές του 19ου αιώνα από την ανάγκη κατανόησης πειραματικών (πείραμα Michelson Morley) και θεωρητικών (εξισώσεις Maxwell) δεδομένων που έδειχναν ότι η ταχύτητα του φωτός παραμένει η ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Το σημαντικό αυτό δεδομένο μπορεί να γίνει κατανοητό μόνα αν εγκαταλειφθούν οι γνωστοί μετασχηματισμοί το Γαλιλαίου και αντικατασταθούν από τους μετασχηματισμούς Lorentz που ενοποιούν τον χώρο και τον χρόνο σε ένα 4-διάστατο συνεχές και εισάγουν την σχετικότητα του χρόνου ρολόγια κινούμενων παρατηρητών χτυπούν με διαφορετικό ρυθμό.

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

<u>Μετασχηματισμός θέσης και χρόνου</u>.

Ένα φαινόμενο που συμβαίνει σε σημείο Μ με συντεταγμένες x, y, z ως προς σύστημα αναφοράς o x y z τη χρονική στιγμή t αποτελεί ένα γεγονός Α. Θεωρούμε σύστημα αναφοράς (Σ) με τους άξονές του παράλληλους με τους αντίστοιχους άξονες του (Σ’). Το Σ' κινείται ως προς το Σ με σταθερή ταχύτητα **υ** παράλληλη προς τον άξονα o x. Για τις συντεταγμένες του ιδίου γεγονότος Μ ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα, ισχύουν οι τύποι:

$$x' = x - \upsilon t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

<u>Μετασχηματισμός ταχύτητας</u>

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - \upsilon$$

<u>Μετασχηματισμός ορμής και ενέργειας</u>

Επανερχόμαστε στην κίνηση του σωματιδίου που εξετάσαμε πριν.

Η ορμή του ως προς το Σ έχει μέτρο $P = m\,\upsilon_x$

Ενώ ως προς το Σ'

$$P' = m\,\upsilon'_x$$

$$P' = m\,(\upsilon_x - \upsilon)$$

$$P' = P - m\,\upsilon$$

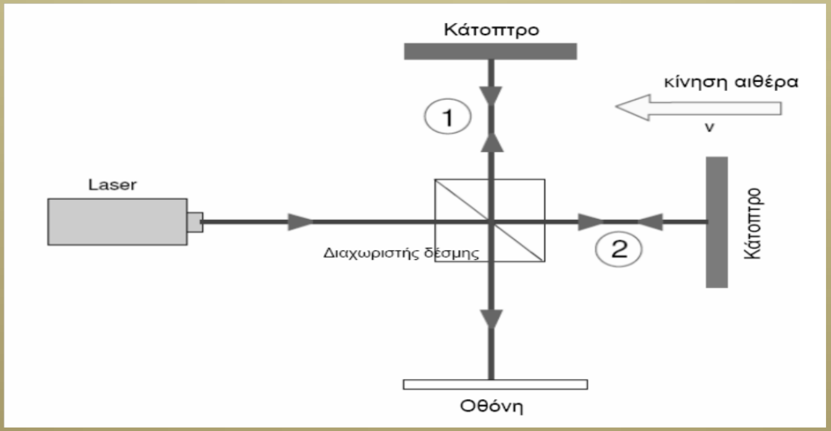
Αρχή Σχετικότητας Γαλιλαίου

- Σύμφωνα με αυτή οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής ισχύουν με την ίδια μορφή για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Μπορεί οι τιμές των φυσικών μεγεθών που εμφανίζονται στους νόμους να είναι διαφορετικές ως προς τα αδρανειακά συστήματα, αλλά οι νόμοι παραμένουν οι ίδιοι. Είναι πολύ φυσικό να αναρωτηθεί κανείς εάν η αρχή της Galilean σχετικότητας μπορεί να εφαρμοστεί και σε πειράματα ηλεκτρισμού, μαγνητισμού, οπτικής, καθώς και σε άλλες κατηγορίες φαινομένων. Εάν δεχτούμε ότι οι νόμοι του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, θα διαπιστώσουμε αμέσως ότι προκύπτει ένα παράδοξο σε σχέση την ταχύτητα του φωτός. πρέπει να συμπεράνουμε είτε (1) ότι ο κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Γαλιλαίου δεν είναι σωστός είτε (2) ότι οι νόμοι του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού δεν είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Αν ο κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Γαλιλαίου δεν είναι σωστός, είμαστε αναγκασμένοι να εγκαταλείψουμε τις φαινομενικά σωστές έννοιες του απόλυτου χρόνου και του απόλυτου μήκους, που αποτελούν τη βάση του μετασχηματισμού Γαλιλαίου.
- Αν δεχτούμε ότι η δεύτερη υπόθεση είναι αληθής, τότε πρέπει να υπάρχει ένα «προνομιακό» σύστημα αναφοράς στο οποίο η ταχύτητα του φωτός έχει την τιμή c, ενώ σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς η ταχύτητα του φωτός θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απ' αυτήν την τιμή, σύμφωνα με τον κανόνα πρόσθεσης ταχυτήτων του Γαλιλαίου.

Τον 19^0 αιώνα, οι φυσικοί υπέθεσαν ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα χρειάζονται ένα μέσο για να διαδοθούν και υποστήριξαν ότι τέτοιο μέσο υπήρχε και το ονόμασαν φωτοφόρο αιθέρα. Υπέθεσαν ότι ο αιθέρας υπήρχε παντού, ακόμη και στον ελεύθερο χώρο, και ότι τα φωτεινά κύματα δεν ήταν τίποτε περισσότερο παρά ταλαντώσεις του αιθέρα. Επί πλέον, ο αιθέρας έπρεπε να έχει τις ασυνήθεις ιδιότητες να είναι ένα αβαρές αλλά συμπαγές μέσο και να μην έχει καμία επίδραση στην κίνηση των πλανητών ή άλλων αντικειμένων.

Το πείραμα του MICHELSON-MORLEY

Το πιο γνωστό πείραμα που σχεδιάστηκε για να ανιχνευθούν μικρές μεταβολές της ταχύτητας του φωτός πραγματοποιήθηκε το 1887 από τους A.A. Michelson και E.W. Morley . Θα πρέπει να αναφέρουμε από την αρχή ότι το αποτέλεσμα του πειράματος ήταν αρνητικό, γεγονός ασύμβατο με την υπόθεση για την ύπαρξη του αιθέρα. Σκοπός του πειράματος ήταν ο προσδιορισμός της ταχύτητας της Γης σε σχέση με τον υποτιθέμενο αιθέρα. Ως πειραματική διάταξη χρησιμοποιήθηκε το συμβολόμετρο Michelson.



Περιγραφή του πειράματος Michelson-Morley

Προκειμένου να κατανοήσουμε το αποτέλεσμα του πειράματος Michelson-Morley, ας υποθέσουμε ότι το συμβολόμετρο που φαίνεται στο Σχήμα έχει δύο σκέλη ίσου μήκους, L. Πρώτα ας εξετάσουμε τη δέσμη που διαδίδεται παράλληλα προς τη διεύθυνση του ρεύματος του αιθέρα, την οποία θεωρούμε οριζόντια .Όταν η δέσμη κινείται προς τα δεξιά, η ταχύτητά της είναι c - v σε σχέση με τη Γη. Κατά την επιστροφή της, όταν δηλαδή η φωτεινή δέσμη κινείται προς τα αριστερά, η ταχύτητά της είναι c + v σε σχέση με τη Γη. Έτσι, ο χρόνος κατά τον οποίο οδεύει προς τα δεξιά είναι L/(c - υ) και ο αντίστοιχος χρόνος προς τα αριστερά είναι L / (c + υ). Ο συνολικός χρόνος μετάβασης και επιστροφής κατά μήκος της οριζόντιας διεύθυνσης είναι

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Τώρα ας θεωρήσουμε τη φωτεινή δέσμη που διαδίδεται κάθετα στο ρεύμα και αντιστοιχεί στην κατακόρυφη διεύθυνση . Δεδομένου ότι σ' αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα της δέσμης ως προς τη Γη είναι $(c^2 - v^2)^{1/2}$, ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει την απόσταση L είναι $L/(c^2 - v^2)^{1/2}$ και ο συνολικός χρόνος μετάβασης και επιστροφής είναι

$$t_2 = \frac{2L}{(c^2-v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{C}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Συνεπώς, η διαφορά χρόνου μεταξύ της δέσμης που διαδίδεται οριζόντια και της δέσμης που διαδίδεται κατακόρυφα είναι

$$t_1 - t_2 = \Delta t = \frac{Lv^2}{c^3}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ - ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

ΣΚΟΠΟΣ

Το πρώτο βήμα έγινε με τη δικαιολόγηση της ανάγκης για μια νέα Μηχανική, με λογικούς συλλογισμούς και συγκεκριμένες εφαρμογές. Ακολουθεί το σημαντικότερο βήμα η διατύπωση του μετασχηματισμού του Lorentz, που συνδέει δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς και αντικαθιστά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Η γενική εικόνα συμπληρώνεται με της συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας όπως την διαστολή του χρόνου και την συστολή του μήκους .

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein βασίζεται σε δυο αξιώματα τα οποία επαληθεύονται από το πείραμα. Τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι τα εξής:

- Πρώτο αξίωμα

  Οι νόμοι και οι αρχές της Φυσικής έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

- Δεύτερο αξίωμα

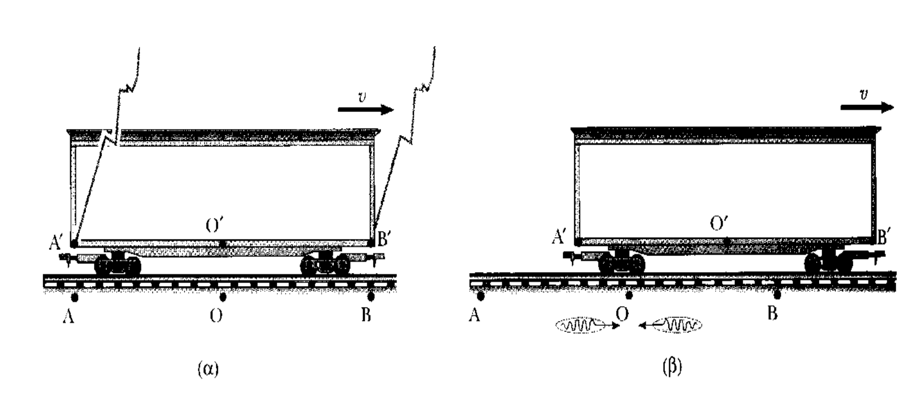
  Το φως στο κενό έχει την ίδια σταθερή ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ανεξάρτητα από την κίνηση της πηγής και του παρατηρητή.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στις έννοιες του μήκους, του χρόνου και του ταυτοχρονισμού, οι οποίες είναι εντελώς διαφορετικές στη σχετικιστική μηχανική από ότι είναι στη Galilean σχετικότητα. θα δούμε ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων και το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο συμβάντων εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο μετρούνται. Αυτό σημαίνει ότι στη σχετικότητα δεν υπάρχει η έννοια του απόλυτου μήκους ή του απόλυτου χρόνου όπως έχουμε αναφέρει. Επί πλέον, θα δείξουμε ότι συμβάντα που συντελούνται ταυτοχρόνως σε διαφορετικές θέσεις σε ένα σύστημα, δεν είναι, ταυτόχρονα σε ένα άλλο σύστημα.

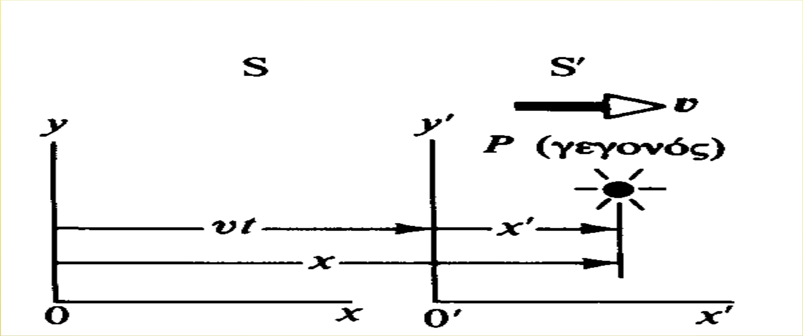
Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΙΣΜΟΥ

Δύο κεραυνοί χτυπούν τα άκρα ενός κινούμενου οχήματος. (α) Τα συμβάντα φαίνονται ότι είναι ταυτόχρονα για τον ακίνητο παρατηρητή στο Ο, ο οποίος βρίσκεται στο μέσο της απόστασης μεταξύ των Α και Β. (β) Τα συμβάντα δεν φαίνονται ότι είναι ταυτόχρονα για τον κινούμενο παρατηρητή στο Ο', ο οποίος υποστηρίζει ότι το πρόσθιο άκρο του οχήματος υφίσταται το χτύπημα του κεραυνού πριν από το οπίσθιο άκρο.



- Σύμφωνα με τον Einstein, ο παρατηρητής στο Ο' πρέπει να παρατηρεί ότι το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα που μετρείται και από τον παρατηρητή στο Ο. Συνεπώς, ο παρατηρητής στο Ο' συμπεραίνει ότι ο κεραυνός χτυπά το πρόσθιο άκρο του οχήματος προτού χτυπήσει το οπίσθιο άκρο. Αυτό το ιδεατό πείραμα δείχνει σαφώς ότι τα δύο συμβάντα, τα οποία φαίνονται ότι είναι ταυτόχρονα για τον παρατηρητή στο Ο, δεν φαίνονται να είναι ταυτόχρονα για τον παρατηρητή στο Ο'.
- Με άλλα λόγια, δύο συμβάντα τα οποία είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα αναφοράς, δεν είναι, ταυτόχρονα σε ένα δεύτερο σύστημα που κινείται ως προς το πρώτο. Αυτό σημαίνει ότι ο ταυτοχρονισμός δεν είναι απόλυτη έννοια. Σ' αυτό το σημείο, ίσως αναρωτηθείτε ποια από τις δύο παρατηρήσεις είναι σωστή σε ότι αφορά τα δύο συμβάντα. Η απάντηση είναι ότι και οι δύο είναι σωστές, επειδή η Αρχή της Σχετικότητας αναφέρει ότι δεν υπάρχει κάποιο προνομιακό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Παρόλο που οι δύο παρατηρητές καταλήγουν σε διαφορετικά συμπεράσματα, και οι δύο έχουν δίκιο στο δικό τους σύστημα αναφοράς, επειδή η έννοια του ταυτοχρονισμού δεν είναι απόλυτη. Πράγματι, αυτό είναι το κεντρικό σημείο της σχετικότητας   δηλαδή κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καταγραφή συμβάντων και τη μελέτη φυσικών φαινόμενων. Δεν υπάρχει κάτι το λανθασμένο με τα ρολόγια ή με τα υποδεκάμετρα που χρησιμοποιούνται για την πραγματοποίηση των μετρήσεων. Απλώς τα χρονικά διαστήματα και οι μετρήσεις μήκους εξαρτώνται από τον παρατηρητή.
- Παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς θα μετρούν διαφορετικά χρονικά διαστήματα με τα ρολόγια τους και διαφορετικές αποστάσεις με τα υποδεκάμετρα τους. Ωστόσο, και οι δύο θα συμφωνούν σε ότι αφορά τους νόμους της φυσικής στα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς τους, αφού οι νόμοι αυτοί είναι οι ίδιοι για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.
- Η σχετικότητα που διέπει τις μετρήσεις χρόνου και αποστάσεων δίνει τη δυνατότητα στους νόμους της φυσικής (συμπεριλαμβανομένων και των εξισώσεων του Maxwell) να είναι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές που κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LORENTZ



Οι εξισώσεις οι οποίες είναι εφαρμόσιμες για όλες τις ταχύτητες και οι οποίες δίνουν την δυνατότητα να μετασχηματίσουμε συντεταγμένες από το σύστημα S στο σύστημα S'

λέγεται ο μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ό ς ε ξ ι σ ώ σ ε ω ν τ ο υ L o r e η t z και είναι

$$x' = \gamma\,(x - \upsilon t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$$

όπου $\gamma = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ LORENTZ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

Θεωρούμε δυο παρατηρητές σε σχετική κίνηση του ενός ως προς τον άλλο οι οποίοι μετρούν ένα κινούμενο αντικείμενο. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου της ταχύτητας ισχύει για μικρές ταχύτητες.

Ας δούμε τώρα με ποιο τρόπο οι μετρήσεις των παρατηρητών, για την ταχύτητα του αντικειμένου, συνδέονται του ενός ως προς τον άλλο, εάν η ταχύτητα του αντικειμένου πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

Έστω S' είναι το σύστημά μας κινούμενο με μια σχετική ταχύτητα υ ως προς το σύστημα S. Υποθέτουμε τώρα ένα αντικείμενο έχει συνιστώσα ταχύτητας υ ', μετρούμενη εντός του συστήματος S' οπότε έχουμε:

$$dx' = \gamma\,(dx - \upsilon dt)$$

$$dt' = \gamma\,(dt - \frac{\upsilon}{c^2} dx)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην πιο πάνω εξίσωση προκύπτει

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,(dx - \upsilon dt)}{\gamma\,(dt - \frac{\upsilon}{c^2} dx)} = \frac{dx - \upsilon dt}{dt - \frac{\upsilon}{c^2} dx}$$

$$u_x' = \frac{dx - \upsilon dt}{dt - \frac{\upsilon}{c^2} dx}$$

$dy' = dy$ και $dz' = dz$ τελικά για τις ταχύτητες u_y' και u_z' έχουμε

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x)}$$ οπότε τελικά

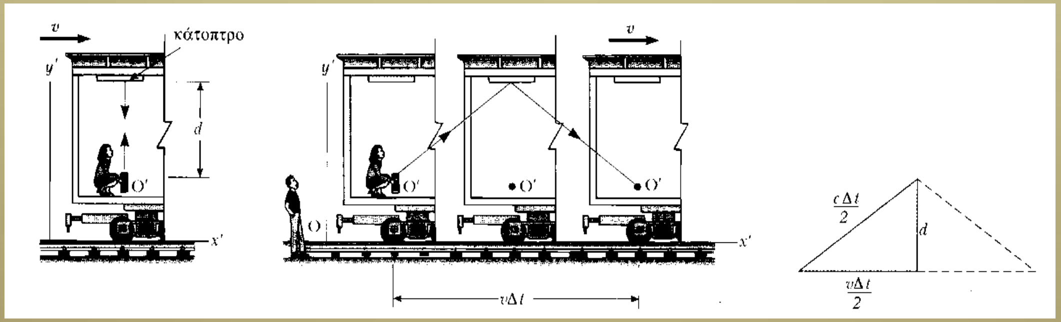
$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2})} \quad \text{και} \quad u_z' = \frac{u_x}{\gamma(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2})}$$

ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Ο παρατηρητής Ο' με ένα ρολόι μεγάλης ακριβείας μετρά το χρονικό διάστημα Δt της πορείας του φωτός παρατηρητής- καθρέπτης- παρατηρητής .

  Όπου $\Delta t' = 2d/c$

- Κατά τη διάρκεια του χρόνου που ο φωτεινός παλμός από το φλας φθάνει στον καθρέπτη, ο καθρέπτης έχει κινηθεί προς τα δεξιά κατά μια απόσταση $\upsilon\Delta t/2$ όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα από τον παρατηρητή Ο’ στον καθρέπτη και πάλι στον Ο’, όπως μετράται από τον παρατηρητή Ο , (γιατί ο καθρέπτης κινείτε αλλά το φως συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα).



- Σύμφωνα με την δεύτερη θεμελιώδη Αρχή της Θεωρίας της Σχετικότητας και οι δυο παρατηρητές πρέπει να μετρούν την τιμή c για την ταχύτητα του φωτός. Επειδή το φως διαδίδεται σε μεγαλύτερη απόσταση, σύμφωνα με τον παρατηρητή Ο, το χρονικό διάστημα Δt μετρούμενο από τον Ο είναι μεγαλύτερο από το χρονικό διάστημα Δt', μετρούμενου από τον παρατηρητή Ο'. Για να υπολογίσουμε την σχέση μεταξύ αυτών των δυο χρονικών διαστημάτων, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα , Σχήμα (γ)

$$(c\Delta t/2)^2 = (v\Delta t/2)^2 + d^2$$

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad \text{όμως} \quad \Delta t' = 2d/c$$

τελικά προκύπτει

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t'$$

Αν σ' ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς δυο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου, και αν το μεταξύ τους χρονικό διάστημα μετρούμενο από ένα παρατηρητή που ηρεμεί σ' αυτό το σύστημα είναι Δt', τότε ένας άλλος παρατηρητής σ ένα δεύτερο σύστημα κινούμενο ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα υ, ως προς το πρώτο σύστημα, κατά την διεύθυνση των συμπιπτόντων αξόνων xx' θα μετρήσει για τα ίδια γεγονότα το χρονικό διάστημα Δt, όπου αυτό δίδεται από την προηγούμενη εξίσωση, όπου το Δt είναι μεγαλύτερο από το χρονικό διάστημα Δt', επειδή γ> 1 (Διαστολή του χρόνου).

ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Σε μεγάλο πλήθος πειραμάτων έχει επιβεβαιωθεί η διαστολή του χρόνου και είναι πλέον μια πραγματικότητα.

Τα μιόνια είναι ασταθή σωματίδια τα οποία έχουν ηλεκτρικό φορτίο ίσο με αυτό του ηλεκτρονίου και μάζα 207 φορές μεγαλύτερη από αυτή του ηλεκτρονίου. Τα μιόνια μπορούν να παραχθούν από τη σύγκρουση της κοσμικής ακτινοβολίας με τους πυρήνες των ατόμων της ανώτερης γήινης ατμόσφαιρας.

Μιόνια ευρισκόμενα σε ηρεμία, στο εργαστήριο, έχουν μια διάρκεια ζωής η οποία μετράται ότι έχει τον ιδιόχρονο

Γνωρίζουμε ότι $P(t) = 1/\lambda e^{-\lambda t}$ με μέση τιμή $\langle t \rangle = 1/\lambda$ ίσο με

$$\Delta t' = 2.2\ \mu s = 2.2 \times 10^{-6} s$$

(α) Χωρίς τη σχετικιστική θεώρηση, μιόνια που δημιουργούνται στην ατμόσφαιρα και την διασχίζουν προς τα κάτω με μία ταχύτητα O.99c διανύουν μόνο 6.6×10^2m, επειδή διασπώνται με ένα μέσο χρόνο ζωής 2.2 μs. Συνεπώς, πολύ ελάχιστα μιόνια φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.

(β) Με τη σχετικιστική θεώρηση των μιονίων ο χρόνος ζωής διαστέλλεται σύμφωνα προς τον παρατηρητή επί της Γης. Οπότε σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή το μιόνιο μπορεί να ταξιδέψει περίπου 4.8×10^3m πριν διασπασθεί. Το αποτέλεσμα είναι ότι μεγάλος αριθμός απ' αυτά φθάνουν στη Γη.

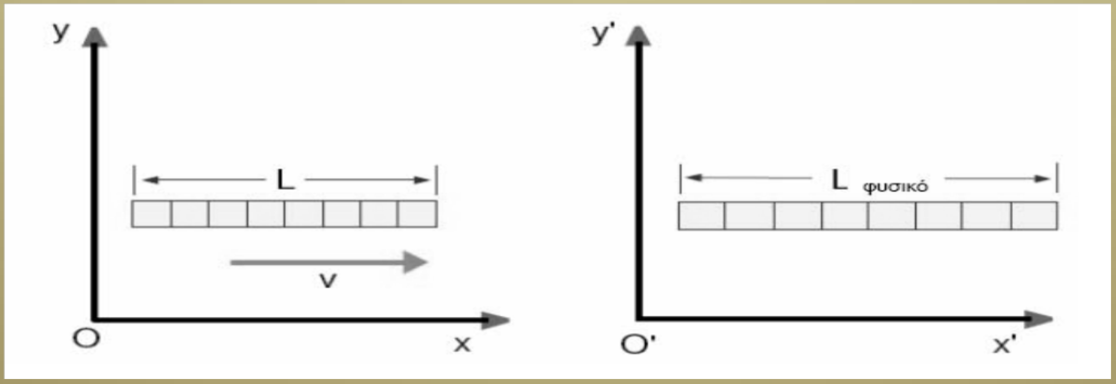
Η ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Εάν ένα αντικείμενο έχει ένα ιδιομήκος L’, όταν αυτό μετριέται από έναν ακίνητο παρατηρητή προς το αντικείμενο, και έχει το μ ή κ ο ς L όταν αυτό κινείται με ταχύτητα υ κατά μια διεύθυνση παράλληλη προς αυτό το μήκος, σύμφωνα με την σχέση:

$$L = L'\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Η συστολή κατά μήκος επηρεάζει μόνο τη διάσταση που είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση της κίνησης. Το μήκος ηρεμίας -ιδιομήκος της ράβδου-σύμφωνα με ένα παρατηρητή που είναι ακίνητος επί της ράβδου φαίνετε ότι είναι L’.

Το μήκος L της ράβδου που μετράει ο ακίνητος ως προς τη Γη παρατηρητής και η οποία κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα υ, θα είναι μικρότερο κατά ένα συντελεστή



Φαινόμενο Doppler

- Το φαινόμενο Doppler που πήρε το όνομά του από τον Κρίστιαν Ντόπλερ (Christian Doppler), είναι η παρατηρούμενη αλλαγή στη συχνότητα και το μήκος κύματος ενός κύματος από παρατηρητή που βρίσκεται σε σχετική κίνηση με την πηγή των κυμάτων. Για κύματα όπως τα ηχητικά κύματα, που διαδίδονται μέσα σε κάποιο υλικό μέσο, η ταχύτητα τόσο του παρατηρητή όσο και της πηγής, πρέπει να προσδιορίζεται σε σχέση με το μέσο διάδοσης.

  Το συνολικό φαινόμενο Ντόπλερ μπορεί επομένως να προκύψει είτε από την κίνηση του παρατηρητή, είτε από την κίνηση της πηγής, είτε και των δύο, ως προς το μέσο διάδοσης. Καθεμιά από αυτές τις δύο επιδράσεις αναλύεται ξεχωριστά. Για κύματα που δεν χρειάζονται ένα υλικό μέσο για τη διάδοσή τους, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά (φως) ή τα βαρυτικά κύματα στην ειδική σχετικότητα, μόνο η σχετική ταχύτητα του παρατηρητή ως προς την πηγή παίζει ρόλο.

  Για κύματα που διαδίδονται μέσα σε ένα υλικό μέσο, η σχέση μεταξύ παρατηρούμενης συχνότητας (f_o) και εκπεμπόμενης (πραγματικής) συχνότητας (f_s) δίνεται από τη σχέση:

$$f_o = f_s$$

  όπου

- υ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος (π.χ. 340 m/s για τον ήχο στον αέρα),
- $υ_0$ είναι η ταχύτητα του παρατηρητή ως προς το μέσο διάδοσης, και
- $υ_s$ είναι η ταχύτητα της πηγής (που εκπέμπει το κύμα) ως προς το μέσο διάδοσης.

Το Φαινόμενο Doppler με τη σχετικιστική περιγραφή

Ας εξετάσουμε την περίπτωση του φωτός που εκπέμπεται από μια πηγή και λαμβάνεται από κάποιο παρατηρητή. Η ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή μπορεί να έχει δύο συνιστώσες: την ακτινική, που είναι στη διεύθυνση παρατηρητή-πηγής και την εγκάρσια, που είναι κάθετη σε αυτή τη διεύθυνση.

Υποθέτουμε ότι η πηγή κινείται με ταχύτητα υ, με ακτινική συνιστώσα $υ_r$ και εγκάρσια συνιστώσα $υ_t$. Αν λο είναι το μήκος κύματος του φωτός στο σύστημα αναφοράς της πηγής, τότε ο παρατηρητής λαμβάνει σήμα με μήκος κύματος λ, διαφορετικό από το λο. Στη Νευτώνεια Φυσική, αν T' είναι η περίοδος δηλαδή το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο μεγίστων του κύματος στο σύστημα της πηγής, τότε η περίοδος για τον παρατηρητή είναι

$$T= T' + υ_r T'/c$$

επειδή το κύμα πρέπει να διανύσει το επιπλέον διάστημα $υ_r T$ κατά το οποίο κινήθηκε η πηγή πιο μακριά ($υ_r >$ O) ή πιο κοντά ($υ_r <$ O) στον παρατηρητή η απόσταση λαμβάνεται θετική όταν αυξάνει.

Όμως γνωρίζουμε λο = c T' και λ = c T, οπότε διαιρώντας προκύπτει

$$λ/λο = 1 + υ_r/c$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το μη σχετικιστικό φαινόμενο Doppler και δίνει το νέο μήκος κύματος λ, αν η πηγή κινείται ως προς τον παρατηρητή. Η εγκάρσια ταχύτητα $υ_t$ δε μεταβάλλει το μήκος κύματος.

Στην περίπτωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η περίοδος T' είναι στο σύστημα της πηγής, δηλαδή σε ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα υ ως προς τον παρατηρητή. Συνεπώς στο σύστημα του παρατηρητή η περίοδος είναι γ T' λόγω διαστολής του χρόνου οπότε τελικά προκύπτει η σχέση

$$T = γ Tα' + γ υ_r T'/c$$

όπου ο όρος $υ_r$ γ T'/c συμπληρώνει το επιπλέον διαστήματος που πρέπει να διανύσει το κύμα. Το νέο μήκος κύματος δίνεται από τη σχέση

$$= γ (1 + υ_r/c)$$

όπου $γ = (1 - υ^2/c^2)^{-1/2}$. Έτσι, στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας υπεισέρχεται και η εγκάρσια ταχύτητα διότι επηρεάζει τον μετασχηματισμό του χρόνου, αφού $υ^2 = υ_r^2 + υ_t^2$.

Στην περίπτωση που έχουμε μόνο ακτινική κίνηση, δηλαδή αν $\upsilon = \upsilon_r$ και $\upsilon_t = 0$, τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}}$$

- Έχουμε τότε το ακτινικό φαινόμενο Doppler, που για v/c « 1 δίνει σε πρώτη προσέγγιση τη σχέση

$$\lambda/\lambda o = 1 + \upsilon_r/c$$

- Στην περίπτωση που δεν έχουμε καθόλου ακτινική κίνηση, δηλαδή αν $\upsilon_r = O$ και $\upsilon = \upsilon_t$ τότε η σχέση γίνεται

$$\lambda/\lambda o = \gamma$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler. Αυτό είναι ένα καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο

Το παράδοξο των διδύμων

- Ας μελετήσουμε τώρα το περίφημο σχετικιστικό αποτέλεσμα, γνωστό ως παράδοξο των διδύμων. Αυτό το παράδοξο περιλαμβάνει δύο ίδια ρολόγια, ένα εκ των οποίων παραμένει στη Γη, ενώ το άλλο το παίρνουν σε ένα ταξίδι στο διάστημα με ταχύτητα *υ* και εν συνεχεία το επιστρέφουν πίσω

  Ο δίδυμος *Α* φεύγει σε ηλικία 20 χρονών και ταξιδεύει με ταχύτητα $\upsilon = 0.8c$ σε

  ένα αστέρι που βρίσκεται σε απόσταση L_o = 20 έτη φωτός. Μετά επιστρέφει πίσω στο σπίτι του στη γη. Η αδερφή του *Β* στο έδαφος πιστεύει ότι η διάρκεια του ταξιδιού του *Α* ήταν μικρότερη σε ποσοστό 60%

  του δικού της χρόνου (δηλαδή πιστεύει ότι ο *Α* έχει ζήσει πιο αργά).

  Τελικά ενώ έχουν περάσει 50 χρόνια σύμφωνα με τους υπολογισμούς της *Β* ($t_o = 2L_o/\upsilon = 50y$), ο αδελφός της *Α* επιστρέφει από ένα ταξίδι που του πήρε μόνο 60% του χρόνου αυτού. Η *Β* λοιπόν πιστεύει ότι ο *Α* έλειψε 30 χρόνια και άρα είναι 50 χρονών ενώ η ίδια είναι τότε μία γυναίκα 70 χρονών.

  Πού είναι λοιπόν το παράδοξο; Εάν εξετάσουμε την κατάσταση από την άποψη του δίδυμου *Α* στο διαστημόπλοιο, η *Β* στη Γη είναι σε κίνηση με ταχύτητα 0.8 *c*. Άρα ο *Α* περιμένει την *Β* να είναι 50 χρονών όταν το διαστημόπλοιο επιστρέψει και ο ίδιος να είναι 70 χρονών - ακριβώς το αντίθετο από ότι βγήκε ως συμπέρασμα πριν.

  Η επίλυση του παραδόξου εξαρτάται από την ασυμμετρία στις ζωές των διδύμων. Η δίδυμη *Β* παραμένει στο ίδιο σύστημα αναφοράς, δηλαδή τη Γη, σε όλη τη ζωή της, γι' αυτό δικαιούται να εφαρμόσει τη διαστολή του χρόνου για το ταξίδι του αδελφού της Α , όταν ο Α επιστρέφει στη Γη. (Αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή η περίοδος είναι μικρή, συγκρινόμενη με το χρόνο διάρκειας του ταξιδιού) . Όμως ο δίδυμος *Α* αλλάζει από το ένα σύστημα στο άλλο και δεν μπορεί να εξάγει σωστά συμπεράσματα. Το συμπέρασμα της διδύμου *Β* ότι ο *Α* είναι ο νεότερος όταν επιστρέφει πρέπει να είναι το σωστό. Τι συνέβη ώστε ο Α να είναι νεότερος από την Β; Η μόνη απάντηση είναι ότι έτσι λειτουργεί το σύμπαν. Είναι πιθανόν και πολύ εποικοδομητικό να βλέπουμε ότι όλα τα γεγονότα συμβαίνουν σε ένα τετραδιάστατο συνεχή χώρο γνωστό ως χωρόχρονο, όπου τρεις συνιστώσες x, y, z αναφέρονται στο χώρο και μία τέταρτη συνιστώσα η ict αναφέρεται στο χρόνο . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τους δρόμους των διδύμων γεωμετρικά στον τετραδιάστατο χώρο και να καταλήξουμε πιο κομψά στα ίδια συμπεράσματα. Ο χωρόχρονος είναι μόνο μία τεχνική για την περιγραφή της πραγματικότητας, όπως είναι και οι αρχές του Einstein. Όλο αυτό το φαινόμενο συναντάται στη βιβλιογραφία ως "το παράδοξο των διδύμων", αν και με αυτή την ορολογία εννοείται άλλοτε η ορθή διαφορά στην ηλικία των διδύμων και άλλοτε ο λανθασμένος ισχυρισμός ότι ο κάθε δίδυμος θα είναι μικρότερος από τον άλλο.

Σχετικιστική ενέργεια και έργο

Για να εξάγουμε τα σχετικά συμπεράσματα, όπως σχέση έργου - κινητικής ενέργειας, φανταζόμαστε ένα σωματίδιο κινούμενο σε μια διάσταση κατά μήκος του άξονα των χ. Μια δύναμη κατά τη x-διεύθυνση επιδρά, ώστε να αλλάξει η ορμή του

σωματιδίου σύμφωνα με την εξίσωση $F = \frac{dp}{dt}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σωματίδιο αυξάνει την ταχύτητά του από την ακινησία σε κάποια τελική ταχύτητα u.

Το παραγόμενο έργο από την δύναμη *F* στο σωματίδιο είναι:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx$$

Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ,

Έχουμε:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}\frac{du}{dt}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση αυτό το αποτέλεσμα και παίρνοντας τα όρια ολοκλήρωσης, που είναι από 0 έως t έχουμε:

$$W = \int_0^u \frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} \frac{du}{dt} u dt = m\int_0^u \frac{u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} du$$

Ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος δίνει:

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι το παραγόμενο έργο από μίας δύναμης που επιδρά σε ένα απλό σωματίδιο είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργεια του σωματιδίου.

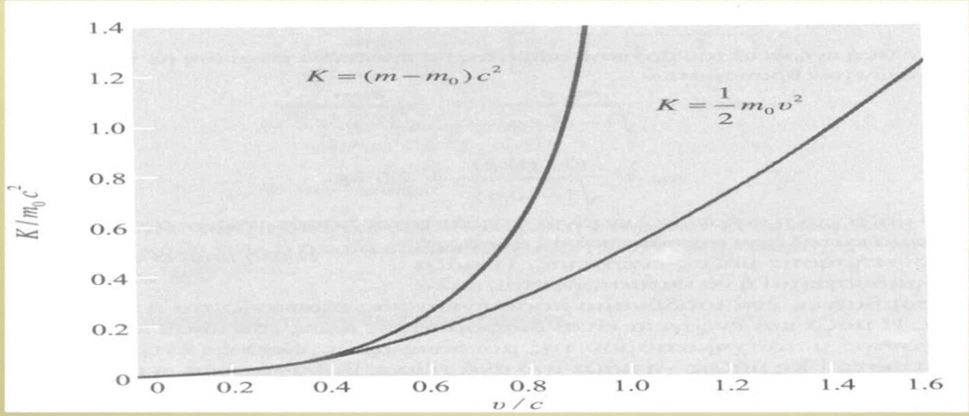
Συνεπώς, το έργο W της προηγούμενης εξίσωσης είναι ισοδύναμο με την σχετικιστική κινητική ενέργεια K, οπότε έχουμε:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma m c^2 - m c^2 = (\gamma-1) m c^2$$

Αυτή η εξίσωση έχει επιβεβαιωθεί από πειράματα χρησιμοποιώντας υψηλής ενέργειας επιταχυντές σωματιδίων.

$K = ½ mu^2$

- Στην κλασική περίπτωση δίνεται από τη γραφική παράσταση



- Στη σχετικιστική περίπτωση η ταχύτητα του σωματιδίου δεν υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός.

  Η σταθερή ποσότητα mc^2 της εξίσωσης η οποία είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας του σωματιδίου λέγεται ενέργεια ηρεμίας Ε, του σωματιδίου, ώστε:

$$E_0 = mc^2$$

- Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας. Αυτή η έκφραση επίσης δείχνει ότι μια μικρή μάζα αντιστοιχεί σε τεράστιο ποσό ενέργειας, μια θεμελιώδη σημασία στην πυρηνική και σωματιδιακή φυσική.
- Η ποσότητα $\gamma\, m\, c^2$ η οποία εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου, είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας του σωματιδίου και

  ονομάζεται ολική ενέργεια Ε.

Ολική Ενέργεια = σχετικιστική κινητική ενέργεια + ενέργεια ηρεμίας.

$$E = K + m_0 c^2$$

Διαφορετικά $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m c^2 = \gamma E_0$

Είναι χρήσιμο να έχουμε μια σχέση που να συνδέει την ολική ενέργεια Ε προς την σχετικιστική γραμμική ορμή P, η οποία ευρίσκεται από της εξισώσεις

$$E = \gamma m c^2 \text{ και } p = \gamma m u$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις δυο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε:

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \text{ και } p^2 = \gamma^2 m^2 u^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει :

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 u^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left[1 - \frac{u^2}{c^2} \right]$$

Γνωρίζουμε ότι το $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$

Τελικά $E^2 = (p c)^2 + (m c^2)^2$

Σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας

Από τη σχέση της μάζας $m = \gamma\, m_0$ προκύπτει ότι, όταν ένα σώμα έχει μάζα ηρεμίας μηδέν, η μόνη ταχύτητα που επιτρέπεται να έχει, είναι η ταχύτητα του φωτός. Από την σχέση της προηγούμενης παραγράφου παίρνουμε:

$$E^2 = (p\,c)^2 + (m\,c^2)^2$$

Όταν το σώμα έχει μάζα ηρεμίας $m_0 = 0$

Προκύπτει $E^2 = (p\,c)^2$ ή $u = c$

Αυτό σημαίνει ότι το σώμα δεν μπορεί να υπάρχει σε ηρεμία, αλλά αναγκαστικά θα κινείται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, από οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και αν υπολογιστεί η ταχύτητα του.

Τα φωτόνια και τα γκραβιτόνια. Τα σωματίδια αυτά, μπορεί να μην έχουν μάζα ηρεμίας, αλλά έχουν και ορμή και μάζα. Ειδικά για τα φωτόνια ενέργειας E, συχνότητας f, μήκους κύματος λ, αν h είναι η σταθερά του Planck, η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας δίνει:

$$E = hf = mc^2$$

δηλαδή η μάζα του φωτονίου είναι

$$m = h\,f/\,c^2$$

Η ορμή του φωτονίου υπολογίζετε:

$$p = mc = h\,f/c \quad \text{ή } p = h/\lambda$$

Τα σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας έχουν ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Τα σωματίδια αυτά δεν επιβραδύνονται ή επιταχύνονται, αλλά απλώς απορροφώνται ή εκπέμπονται από τα σώματα, με ταχύτητα c, σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

ΤΟ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

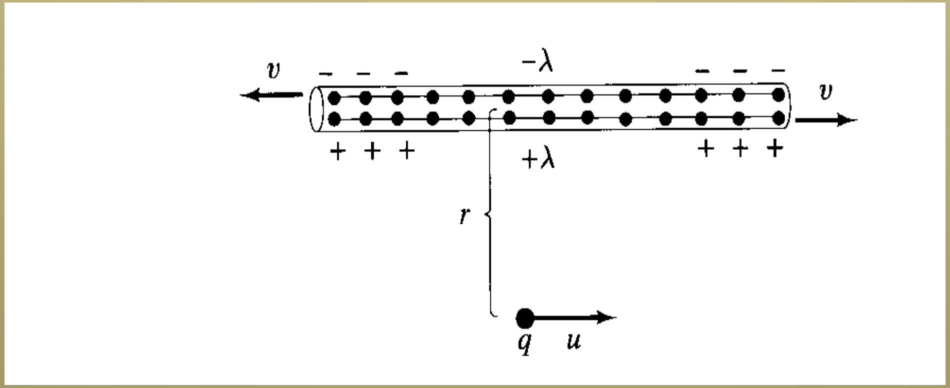
- Τα πειραματικά δεδομένα έχουν δείξει ότι το φορτίο ενός σώματος δεν μεταβάλ-λεται, όπως η μάζα , όταν αλλάζει η ταχύτητα του σώματος.
- Στα άτομα οι πυρήνες κινούνται πολύ αργά σε σχέση με την ταχύτητα των ηλεκτρονίων. Το φορτίο του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου έχουν ίδια απόλυτη τιμή, ανεξάρτητα από τις μεγάλες ταχύτητες των ηλεκτρονίων.
- Εξάλλου και η ελάχιστη διαφορά να υπήρχε, τα διάφορα σώματα, λόγω του μεγάλου πλήθους πρωτονίων και ηλεκτρονίων που περιέχουν, θα ήταν φορτισμένα.
- Φόρτιση επίσης θα εμφανιζόταν και κατά την θέρμανση των σωμάτων. Τα ελεύθερα ηλεκτρό-νια, επειδή έχουν πολύ μικρότερη μάζα από τους πυρήνες, με την θέρμανση η ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυξάνεται πολύ περισσότερο από την ταχύτητα των πυρήνων. Αν το φορτίο εξαρτιόταν από την ταχύτητα, κατά την θέρμανση τους τα σώματα θα παρουσία-ζαν φόρτιση, η οποία όμως δεν παρατηρείται.
- Κατά τις χημικές αντιδράσεις, εάν υπήρχε εξάρτηση του φορτίου από την ταχύτητα, θα άλλαζε το ολικό φορτίο των σωμάτων. Αυτό, γιατί κατά τις χημικές αντιδράσεις αλ-λάζει η μέση τιμή της ταχύτητας των ηλεκτρονίων και η ελάχιστη μεταβολή στην τιμή του φορτίου, λόγω του μεγάλου αριθμού τους, θα γινόταν αντιληπτή. Αυτό όμως δεν έχει παρατη-ρηθεί σε καμιά χημική αντίδραση.
- Σήμερα είναι εδραιωμένη η πεποίθηση ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι αναλλοίωτο και τέτοιο θεωρείται σε όλα τα πειράματα και σε όλους τους υπολογισμούς. Συνεπώς το ηλεκτρικό φορτίο ενός σώματος είναι ποσότητα αναλλοίωτη και δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ή από την εκλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας πώς με μόνα δεδομένα την ηλεκτροστατική και τη Σχετικότητα, η ύπαρξη του μαγνητισμού γίνεται υποχρεωτική, και ειδικότερα, πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί ένα ρευματοφόρο σύρμα σε ένα κινούμενο φορτίο, χωρίς να κάνουμε καμία χρήση των κλασικών νόμων του μαγνητισμού Υποθέτουμε ότι κατά μήκος μιας ευθείας υπάρχει μία γραμμική διάταξη θετικών φορτίων που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα *υ.* Τα φορτία αυτά είναι αρκετά κοντά το ένα στο άλλο, ώστε η διάταξή τους να μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνεχής γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ.

Παράλληλα προς αυτή την κατανομή θετικού φορτίου έχει τοποθετηθεί μία αρνητική κατανομή (πυκνότητας -λ) που κινείται προς τα *αριστερά* με την ίδια ταχύτητα *υ.* Επομένως, κατά μήκος της ευθείας ρέει (προς τα δεξιά) ένα συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα έντασης

$$I = 2\lambda\upsilon$$



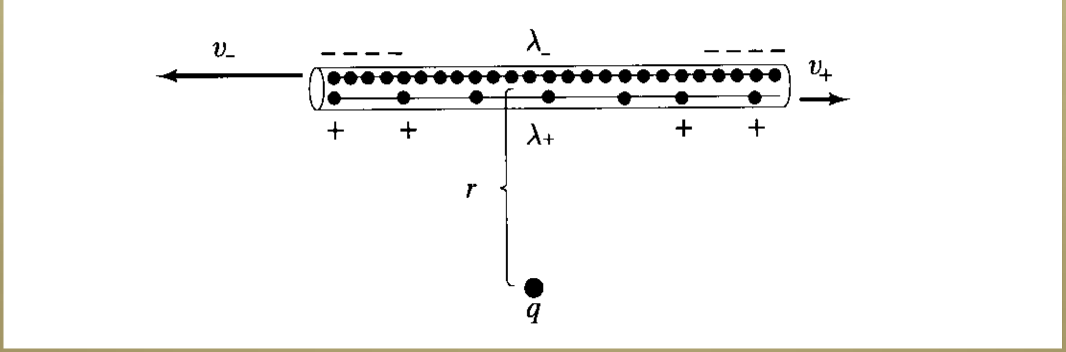
- Σε απόσταση *r* από τον αγωγό υπάρχει ένα σημειακό φορτίο *q* που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα *u* .Προφανώς, σε αυτό το σύστημα αναφοράς S το φορτίο *q* δεν υφίσταται καμία ηλεκτρική δύναμη, αφού οι γραμμικές πυκνότητες *λ* και – *λ* αλληλοαναιρούνται.
- Δεν ισχύει όμως το ίδιο στο σύστημα αναφοράς *S'*, όπου το σημειακό φορτίο ηρεμεί (το S' κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα *u* ως προς το S)
- ολική πυκνότητα φορτίου στο S' είναι $\lambda_{ολική} = \lambda_0 (\gamma_+ - \gamma_-)$
- <u>Συμπέρασμα</u>*:* Λόγω των άνισων συστολών Lorentz των γραμμικών κατανομών θετικού και αρνητικού φορτίου, το ρευματοφόρο σύρμα, ενώ στο σύστημα *S* είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, έχει στο σύστημα *S'* μία μη μηδενική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου.

Το γραμμικό φορτίο πυκνότητας $\lambda_{ολική}$ δημιουργεί στο S' ένα *ηλεκτρικό* πεδίο

$$E = \lambda_{ολική} / 2\pi\varepsilon_o r$$

- Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο κάθε καλά ορισμένου συστήματος είναι αναλλοίωτο, δηλαδή το ίδιο για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Όποτε στο σύστημα S' το σημειακό φορτίο q δέχεται μία ηλεκτρική δύναμη

$$F' = q\,E$$



- Όμως, αν το *q* δέχεται μία δύναμη στο S', θα πρέπει να δέχεται μία δύναμη και στο S αυτή δύναμη αυτή μπορούμε να την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού. Αφού το *q* είναι ακίνητο στο S' και η ασκούμενη δύναμη F′ είναι κάθετη στην ταχύτητα *u,* η δύναμη στο S θα δίνεται από την εξίσωση

$$F = F' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = - \frac{\lambda u q v}{\pi \varepsilon_0 c^2 r}$$

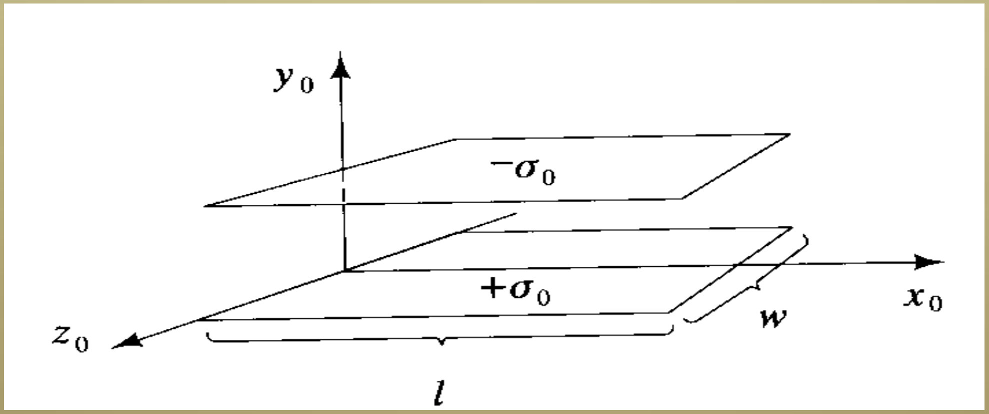
Επομένως, το φορτίο έλκεται προς τον αγωγό με μία δύναμη, που είναι καθαρά ηλεκτρική στο S' (όπου εμφανίζεται μη-μηδενική κατανομή φορτίου και το *q* είναι ακίνητο) και σίγουρα μη ηλεκτρική στο S (όπου το σύρμα είναι ουδέτερο). Αν λοιπόν η ηλεκτροστατική και η Ειδική Σχετικότητα είναι σωστές, θα πρέπει να δεχτούμε ότι υπάρχει και κάποιου άλλου είδους δύναμη. Αυτή η "άλλη δύναμη", φυσικά, είναι η μαγνητική.

Αν μάλιστα θέσουμε $c^2 = (\varepsilon_o \mu_o)^{-1/2}$ και εκφράσουμε το *λ υ* συναρτήσει του ρεύματος θα πάρει την μορφή:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\right) q\, u$$

Μετασχηματισμός των Πεδίων

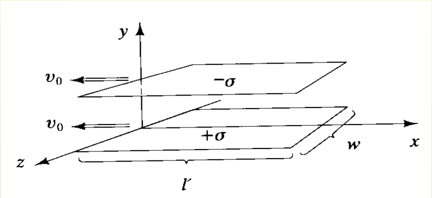
- Μάθαμε ότι ο χαρακτηρισμός ενός πεδίου είναι σχετικός ένα πεδίο που για κάποιον παρατηρητή είναι ηλεκτρικό, για κάποιον άλλο μπορεί να είναι μαγνητικό. Πολύ συχνά, τίθεται το ερώτημα αν είναι γνωστά τα πεδία σε ένα σύστημα S, ποια είναι τα πεδία σε ένα άλλο σύστημα S'
- Πρέπει να βρούμε τους γενικούς κανόνες μετασχηματισμού των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. θα διατυπώσουμε ρητά δύο βασικές υποθέσεις της σχετικιστικής ηλεκτροδυναμικής.
- Η πρώτη, που ήδη χρησιμοποιήθηκε είναι ότι το φορτίο είναι μία αναλλοίωτη ποσότητα. Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι οι κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων είναι πάντα οι ίδιοι, ανεξαρτήτως του πώς έχουν παραχθεί τα πεδία. Έτσι, για παράδειγμα, ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούνται από κινούμενα ρεύματα θα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και το πεδίο ενός ακίνητου φορτίου.
- Όπως αντιλαμβανόμαστε , αν δεν ίσχυε κάτι τέτοιο, θα ήμαστε υποχρεωμένοι να εγκαταλείψουμε την ιδέα του πεδίου . Η ουσία της θεωρίας πεδίων είναι ότι τα πεδία σε ένα σημείο δίνουν όλες τις ηλεκτρομαγνητικές πληροφορίες που σχετίζονται με το σημείο αυτό, και δεν χρειαζόμαστε πρόσθετες πληροφορίες σχετικές με την πηγή του.
- Ας δούμε πώς μετασχηματίζεται το απλούστερο δυνατό ηλεκτρικό πεδίο το ομογενές πεδίο που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών ενός μεγάλου πυκνωτή παράλληλων πλακών. Υποθέτουμε ότι ο πυκνωτής ακινητεί στο S_0 και ότι οι πυκνότητες φορτίου στους δύο οπλισμούς του είναι $-\sigma_o$ και $+\sigma_o$ αντίστοιχα.



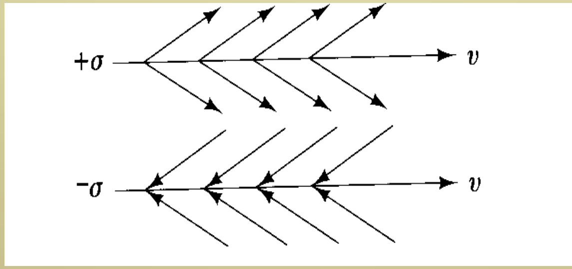
Το ηλεκτρικό πεδίο, είναι $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{j}$

Το ηλεκτρικό πεδίο που μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ένα σύστημα S, το οποίο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_o

Στο σύστημα αυτό ο πυκνωτής κινείται προς τα αριστερά, αλλά το ηλεκτρικό πεδίο έχει και πάλι την ίδια μορφή:



Έτσι, η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα η πυκνότητα φορτίου είναι *σ.* Για να γράψουμε την σχέση (14) εφαρμόσαμε το νόμο του Gauss, υποθέτοντας ότι το πεδίο είναι *κάθετο* στους οπλισμούς του πυκνωτή ακόμη και όταν αυτός κινείται.. Το πεδίο μιας κινούμενης επίπεδης πλάκας θα μπορούσε, να έχει μια κλίση προς την κατεύθυνση της κίνησης .



$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$

Το πεδίο μεταξύ των πλακών, εάν είχε κλίση (που δεν έχει) προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων που δημιουργούν οι επιφανειακές πυκνότητες -σ και +σ, θα ήταν και πάλι κάθετο σε αυτές. Σε μία τέτοια περίπτωση το πεδίο του φορτίου -*σ* θα είχε τη φορά που φαίνεται στο Σχήμα (5) .

Φυσικά δεν ξεχνούμε ότι το ολικό φορτίο της κάθε πλάκας είναι αναλλοίωτο.

$$\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$$

έτσι το φορτίο ανά μονάδα εμβαδού είναι αυξημένο κατά τον συντελεστή γ_0

$$\sigma = \gamma_0 \, \sigma_0$$

Προφανώς λοιπόν ισχύει η σχέση

$$E_{\kappa\alpha\theta\epsilon\tau} = \gamma_0 \; E_{0\kappa\alpha\theta\epsilon\tau}$$

Για να υπολογίσουμε τον κανόνα μετασχηματισμού για παράλληλες συνιστώσες, θα πρέπει να θεωρήσετε τον πυκνωτή παράλληλο προς το επίπεδο yz .

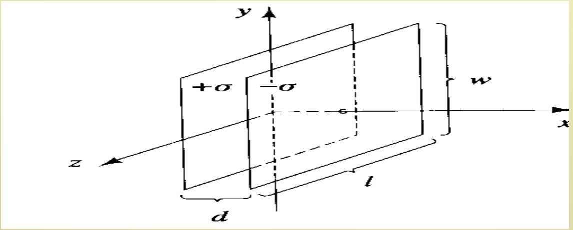
Σε αυτή την περίπτωση η συστολή Lorentz επηρεάζει μόνο την απόσταση d μεταξύ των δύο πλακών τα l και w είναι ίδια και στα δύο συστήματα. Αφού το πεδίο δεν εξαρτάται από το d, θα είναι

$$E_{\kappa\alpha\theta\epsilon\tau} = E_{0\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta}$$

Για να υπολογίσουμε τον κανόνα μετασχηματισμού για παράλληλες συνιστώσες, θα πρέπει να θεωρήσετε τον πυκνωτή παράλληλο προς το επίπεδο yz .

Σε αυτή την περίπτωση η συστολή Lorentz επηρεάζει μόνο την απόσταση d μεταξύ των δύο πλακών τα l και w είναι ίδια και στα δύο συστήματα. Αφού το πεδίο δεν εξαρτάται από το d, θα είναι

$$E_{καθετ} = E_{0παραλλη}$$



Οι προηγούμενες σχέσεις δεν είναι ακόμα οι γενικοί κανόνες μετασχηματισμού που αναζητούμε μας λένε, πως μετασχηματίζονται οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου Ε (στην ειδική περίπτωση που εξετάσαμε), αλλά δεν μας δίνουν καμιά πληροφορία για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου Β. Αυτό ήταν κάτι το αναμενόμενο, αφού ξεκινήσαμε από ένα σύστημα S_o στο οποίο τα ηλεκτρικά φορτία ήταν ακίνητα και όπου και φυσικά δεν υπήρχε μαγνητικό πεδίο. Για να εξαγάγουμε τους γενικούς κανόνες μετασχηματισμού, θα πρέπει να ξεκινήσουμε από ένα σύστημα στο οποίο να υπάρχει και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Κατάλληλο σύστημα για αυτό τον σκοπό είναι το S. Εκτός από το ηλεκτρικό πεδίο

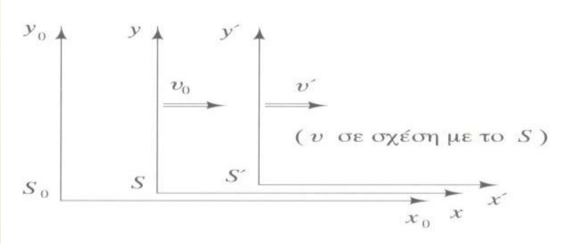
$E_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ Στο σύστημα αυτό υπάρχει και ένα μαγνητικό πεδίο, που οφείλεται στις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος

$$K_{\pm} = \mp \sigma \upsilon_0 \hat{i}$$

Από τον κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει ότι το πεδίο αυτό έχει την κατεύθυνση του αρνητικού άξονα Z' το μέτρο του υπολογίζεται από το νόμο του Ampere

$$B_Z = -\mu_o \sigma \upsilon_o$$

Έστω ένα τρίτο σύστημα S', που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ ως προς το S,



Τα πεδία στο σύστημα αυτό θα είναι

$$E'_y = \frac{\sigma'_0}{\varepsilon_0} \quad \text{και} \quad B'_Z = -\mu_o\, \sigma'\, \upsilon'$$

Όπου υ' είναι η ταχύτητα του S' ως προς το S_0

$$\upsilon' = \frac{v+v_0}{1+\frac{vv_0}{c^2}} \quad , \quad \gamma' = 1/\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}} \quad \text{οπότε}$$

$$\sigma' = \gamma'\, \sigma_0$$

Για να υπολογίσουμε πως μετασχηματίζονται τα πεδία από το στο S', αρκεί να εκφράσουμε τα E' και B', συναρτήσει των E και B βρίσκουμε ότι

$$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{και} \quad B'_Z = -\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \mu_o\, \sigma\, \upsilon' \ (25)$$

Ο λόγος $\frac{\gamma'}{\gamma_0}$ υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma \left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right)$$

Οπότε εύκολα προκύπτει

$$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma \left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c^2\varepsilon_0\mu_0} B_z\right) \ (27)$$

Και αντίστοιχα

$B'_Z = -(\frac{\gamma'}{\gamma_0})\ \mu_o\ \sigma\ \upsilon' = \gamma\ (B_z - \varepsilon_0\mu_0\upsilon\ \mathrm{Ey}\ )$ Γνωρίζουμε ότι

$\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

και οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$E'_y = \gamma(E_y - \upsilon\ B_z)$ $B'_Z = \gamma\ (B_z - \frac{\upsilon}{c^2}\ \mathrm{Ey}\ )$

Οι εξισώσεις αυτές μας δείχνουν πως μετασχηματίζονται τα Ey και B_Z για να υπολογίζουμε πως μετασχηματίζονται οι συνιστώσες E_Z και B_Y θα πρέπει να τοποθετήσουμε τον πυκνωτή παράλληλα προς το επίπεδο xy.

Στην περίπτωση αυτή τα πεδία στο S, είναι

$E_Z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $B_y = \mu_o\ \sigma\ \upsilon_o$

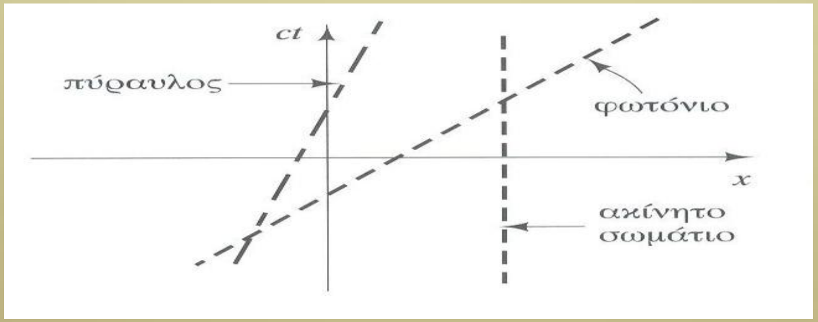
Η υπόλοιπη διαδικασία είναι ακριβώς ίδια με αυτή που ακολουθήσαμε προηγουμένως αντικαθιστώντας το E_y με E_Z και το B_Z με $-E_y$.

Φτάνουμε στις σχέσεις

$E'_z = \gamma(E_z + \upsilon\ B_y)$ $B'_Z = \gamma\ (B_y + \frac{\upsilon}{c^2}\ \mathrm{E}z\ )$

Χωροχρονικά διαγράμματα

- Όταν θέλουμε να απεικονίσουμε την κίνηση ενός σωματίου σε ένα διάγραμμα, συνήθως παριστάνουμε γραφικά τη θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου (δηλαδή, ο χρόνος *t* απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα και η θέση *x* στον κατακόρυφο άξονα). Σε ένα τέτοιο διάγραμμα η ταχύ-τητα προσδιορίζεται από την κλίση της καμπύλης. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των θέσεων και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο άξονας του χρόνου (ή x^{O} = ct). Η ταχύτητα, στην περίπτωση αυτή, δεν είναι η αριθμητική τιμή της κλίσης, αλλά η αντίστροφή της. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα η κατάσταση ενός ακίνητου σωματίου παριστάνεται με μία κατακόρυφη ευθεία· αντίστοιχα, η κίνηση ενός φωτονίου περιγράφεται από μία γραμμή κλίσης 1, ενώ η κίνηση ενός πυράυλου, που ταξιδεύει με κάποια ενδιάμεση ταχύτητα, περιγράφεται από μία ευθεία κλίσης c/v = 1/ β. Η τροχιά που διαγράφει ένα σωμάτιο σε ένα τέτοιο χωροχρονικό διάγραμμα αποκαλείται η κοσμική γραμμή .



Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t (t = 0 το *x* = 0). Δεδομένου ότι κανένα υλικό αντικείμενο δεν μπορεί να κινηθεί ταχύτερα από το φώς, η κοσμική σας γραμμή δεν μπορεί ποτέ να έχει κλίση μικρότερη από 1. Κατά συνέπεια, η κίνησή μας περιορίζεται στην τριγωνική περιοχή που οριοθετείται από τις δύο ευθείες που σχηματίζουν γωνία 45^0 με τον κάθετο θετικό ημιάξονα. Η περιοχή αυτή είναι το "μέλλον" μας, γιατί περιλαμβάνει όλα τα χωροχρονικά σημεία (γεγονότα) στα οποία έχουμε δυνητικά πρόσβαση, τη στιγμή που ξεκινάμε από την αρχή των αξόνων.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ

Αναλλοίωτο διάστημα

Έστω δύο γεγονότα Α και Β με συντεταγμένες (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3) και (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3) αντίστοιχα. Η διαφορά είναι

$$\Delta x^\mu = x_A^\mu - x_A^\mu$$

το τετραδιάνυσμα μετατόπισης. Το αναλλοίωτο γινόμενο του Δx^μ με τον εαυτό του είναι μία ποσότητα σημαντική, και ονομάζεται διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων:

$$I = (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu$$
$$= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$
$$= -c^2t^2 + d^2$$

Αν $I < 0$, το διάστημα ονομάζεται χρονοειδές, γιατί έχει αρνητικό πρόσημο το διάστημα δύο γεγονότων που συμβαίνουν στο ίδιο σημείο ($d = 0$), αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Αν $I > 0$, το διάστημα ονομάζεται χωροειδές, γιατί έχει θετικό πρόσημο το διάστημα δύο γεγονότων που συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή ($t = 0$), αλλά σε διαφορετικές θέσεις.

Αν $I = 0$, το διάστημα ονομάζεται φωτοειδέςκαι συμβαίνει όταν δύο γεγονότα μπορούν να "επικοινωνήσουν" με μία ακτίνα φωτός.

Η αναλλοίωτη ποσότητα $E^2 - P^2 c^2$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων για την ορμή προκύπτει η αναλλοίωτη ποσότητα δηλαδή,

$$P^\mu P_\mu = -(P^0)^2 + PP$$
$$P^\mu P_\mu = -m^2 c^2$$

Οπότε $$-(P^0)^2 + P P = -m^2 c^2$$
$$- + P P = -m^2 c^2$$
$$E^2 - P^2 c^2 = m^2 c^4$$

Η σχέση αυτή είναι σημαντική γιατί μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίζουμε το Ε ή το p χωρίς να γνωρίζουμε την ταχύτητα u .

Διδασκαλία των μετασχηματισμών Lorentz και βασικές έννοιες ειδικής θεωρίας σχετικότητας
Τάξη : Γ' Λυκείου

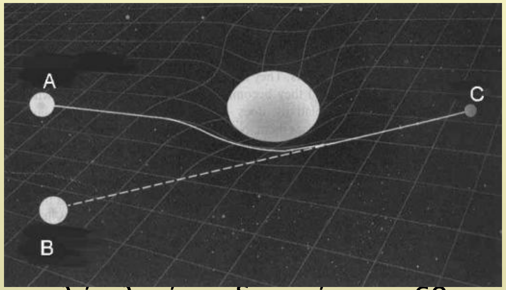
- **Στόχοι**
- Να κατανοηθεί η αναγκαιότητα χρήσης των μετασχηματισμών Lorentz από τον Einstein, δηλαδή ότι μόνο με τους μετασχηματισμούς αυτούς οι εξισώσεις Maxwell έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.
- Να μπορούν να γράφουν τους μετασχηματισμούς και από το Σ' στο Σ αλλάζοντας το πρόσημο της ταχύτητας.
- Μελέτη των φαινομένων διαστολή χρόνου και συστολή μήκους με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Να περιγράφει με λόγια και με τύπους το πείραμα Michelson.
- Να περιγράφει τυπικά φαινόμενα που ερμηνεύονται μόνο με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Να διακρίνει ότι η ισότητα αδρανειακής και βαρυτικής μάζας είναι η πειραματική βάση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.
- Ν α γνωρίζει ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η μεγαλύτερη που μπορεί να υπάρξει στη φύση. Να γνωρίζει ότι, αντίθετα με ότι συμβαίνει με τον ήχο και τα άλλα μηχανικά κύματα, η ταχύτητα του φωτός δεν εξαρτάται από την κίνηση της πηγής που το εκπέμπει.
- Να μπορεί να περιγράφει το πείραμα Michelson και να κατανοήσει τη σημασία του πειράματος αυτού.
- Να αντιλαμβάνεται ότι η χρονική διάρκεια ενός φαινομένου και το μήκος ενός αντικειμένου έχουν τιμές που εξαρτώνται από την ταχύτητα του παρατηρητή.
- Να γνωρίζει ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου για τη θέση και την ταχύτητα ενός σώματος δεν επαρκούν στις περιπτώσεις που η σχετική ταχύτητα των αδρανειακών συστημάτων πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Να μπορεί, με αφετηρία τους μετασχηματισμούς Lorentz, να παράγει τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.
- Να γράφει τις σχέσεις που δίνουν τη (σχετικιστική) ορμή και ενέργεια ενός σώματος και να βρίσκει τις αντίστοιχες σχέσεις στην περίπτωση που το σώμα έχει ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.
- Να γνωρίζει ότι σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας δεν ισχύουν η αρχή διατήρησης της μάζας και η αρχή διατήρησης της ενέργειας αλλά ισχύει η αρχή διατήρησης μάζας και ενέργειας.
- Να αντιλαμβάνεται ότι η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μια θεωρία για τη βαρύτητα.
- Να αντιλαμβάνεται ότι η παρουσία μιας μάζας καμπυλώνει το χωροχρόνο. Να γνωρίζει μερικά πειραματικά δεδομένα που επιβεβαιώνουν τη θεωρία της σχετικότητας και ερμηνεύονται με αυτήν.

Εκπαιδευτική προσέγγιση

- Ιστορική αναδρομή που θα περιλαμβάνει την κατάσταση που βρισκόταν η Φυσική στις αρχές του 20ου αιώνα, όταν η κλασική Μηχανική συναντούσε προβλήματα με συστήματα αναφοράς όπου εμπλέκονταν σωμάτια κινούμενα με την ταχύτητα του φωτός. Αναφορά στην έννοια του αδρανειακού συστήματος και μια σύντομη Σχετικιστική ανάλυση της έννοιας του ταυτοχρονισμού .
- Ιδιαιτέρα για τους Μετασχηματισμοί έντασης ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου .
- Πρέπει να τονίσουμε ότι μια ολοκληρωμένη ανάπτυξη του θέματος είναι πολύ δύσκολη στο επίπεδο της Γ' τάξης του λυκείου. Θεωρούμε ότι είναι αρκετό να κατανοήσουν οι μαθητές μας ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι δυο διαφορετικές όψεις του ίδιου πράγματος, ανάλογα με το σύστημα αναφοράς από το οποίο το παρακολουθούμε.
- Είναι επίσης σημαντικό να τονιστεί ότι η ηλεκτρομαγνητική θεωρία δε χρειάστηκε να τροποποιηθεί από τη θεωρία της σχετικότητας.

Κατασκευή μοντέλου

- Μετά από την εισαγωγική συζήτηση η χρήση του μοντέλου για τον χωροχρόνο θα δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να δουν πως ένας επίπεδος χώρος μπορεί να καμπυλώσει και πως θα συμπεριφέρονταν σώματα αν αφήνονταν να κινηθούν μέσα στο χώρο αυτό. Έτσι λοιπόν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο όπως φαίνεται πιο κάτω:



- Το μοντέλο μπορεί να φτιαχτεί με απλά υλικά με διαστάσεις 60cm x 80cm x 1cm. Τα υλικά που απαιτούνται είναι:
- Μια μπάλα μπιλιάρδου , μικρές μπάλες ή μπίλιες
- Ένα ξύλινο παραλληλόγραμμο 60cm x 80cm x 1cm
- Σφουγγάρι ή κάποιο ελαστικό αφρώδες υλικό 60cm x 80cm x 5cm
- Ένα ελαστικό ύφασμα για να καλύψουμε το μαλακό υλικό.
- Οπτικές ίνες για την κατασκευή ενός μικρού κυκλώματος με ηλεκτρική πηγή
- Η κατασκευή μπορεί εύκολα να γίνει και από τους καθηγητές αλλά και από τους μαθητές . Μέσα από τη διαδικασία της κατασκευής οι μαθητές θα αναπτύξουν πνεύμα συνεργασίας και ομαδικότητας αλλά και ικανότητες όπως μέτρησης και κατασκευής μιας πειραματικής διάταξης , καλλιεργώντας την κριτική σκέψη θα κατανοήσουν καλύτερα το πείραμα. Όμως το σημαντικότερο είναι ότι θα μάθουν μέσα από τη δική τους δημιουργική αλληλεπίδραση με το αντικείμενο .
- Με τη βοήθεια του μοντέλου οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια της καμπύλωσης του επίπεδου χώρου. Αφήνοντας μια μικρότερη μάζα να κινηθεί στον καμπύλο χώρο , που έχει δημιουργηθεί από μια βαρύτερη σφαίρα , μπορούν να παρακολουθήσουν την τροχιά της. Μια μάζα που αφήνεται στον καμπυλωμένο χώρο θα κινηθεί προς την μεγαλύτερη μάζα που δημιουργεί την καμπύλωση ενώ μια μάζα που σπρώχνεται με κάποια ταχύτητα εφαπτομενικά προς ένα κύκλο με κέντρο την μεγαλύτερη μάζα θα κινηθεί γύρω από αυτή τη μεγαλύτερη μάζα. Η κατανόηση του χώρου γίνεται μέσα από την άμεση αλληλεπίδραση των μαθητών με το μοντέλο. Επίσης η επεξήγηση της καμπύλωσης των ακτίνων του φωτός , ενός μακρινού αστεριού, καθώς περνούν κοντά στον Ήλιο, λόγω της παραμόρφωσης του χώρου γύρω από την τεράστια μάζα του Ήλιου μπορεί να φανεί με τη βοήθεια του μοντέλου αυτού. Η φαινόμενη θέση του αστεριού επειδή υποθέτουμε ότι το φως κινείται ευθύγραμμα μπορεί να βρεθεί από τους μαθητές οι οποίοι έχουν την ευχέρεια να σημειώσουν πορείες ακτίνων που εκπέμπονται από το αστέρι. Ένα πειραματικό γεγονός το οποίο συμφωνεί με τις προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.